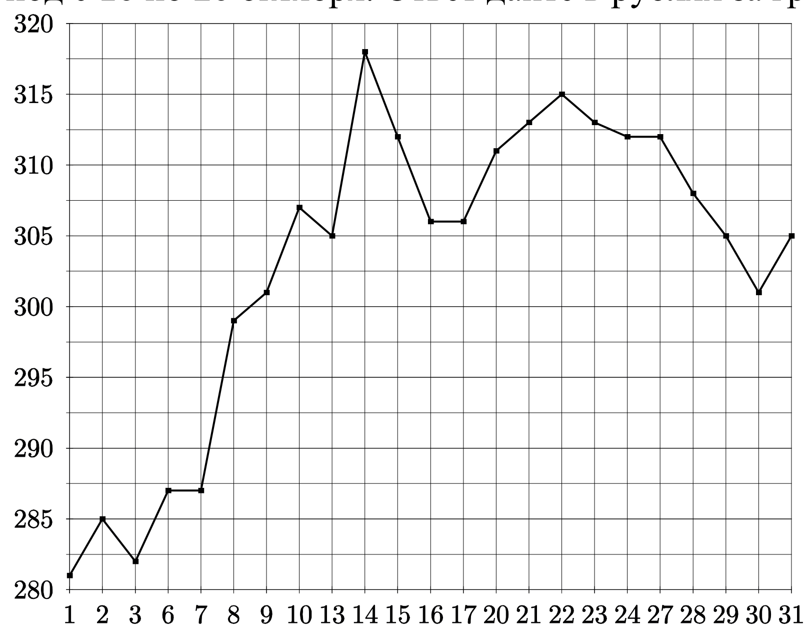
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 На счету Настиного мобильного телефона было 57 рублей, а после разговора с Мишей осталось 15 рублей. Сколько минут длился разговор с Мишей, если одна минута разговора стоит 1 рубль 50 копеек?

Ответ: ____________________________.

2 На рисунке показана цена палладия, установленная Центробанком РФ, во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену палладия в период с 10 по 20 октября. Ответ дайте в рублях за грамм.

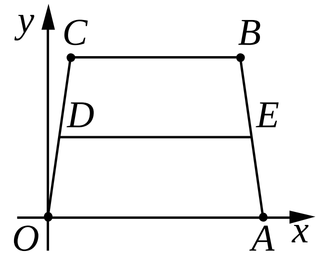


Ответ: ____________________________.

3 Для того чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерстяной пряжи красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 70 рублей за 50 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 рублей за 50 граммов и окрасить её. Один пакетик краски стоит 20 рублей и рассчитан на окраску 450 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Ответ: ____________________________.

4 Точки $O(0;\ 0)$, $A(19;\ 0)$, $B(17;\ 14)$, $C(2;\ 14)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину её средней линии DE.



Ответ: ___________________________.

5 В чемпионате по гимнастике участвуют 25 спортсменок: 7 из Венгрии, 9 из Румынии, остальные — из Болгарии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Болгарии.

Ответ: ___________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 6.1 или 6.2.

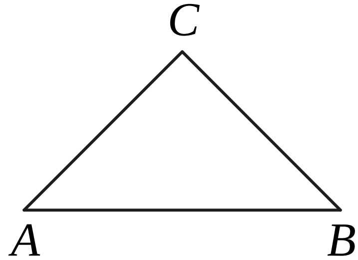
6.1 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x} = 25$.

Ответ: ___________________________.

6.2 Найдите корень уравнения $\sqrt{23-2x} = 3$.

Ответ: ___________________________.

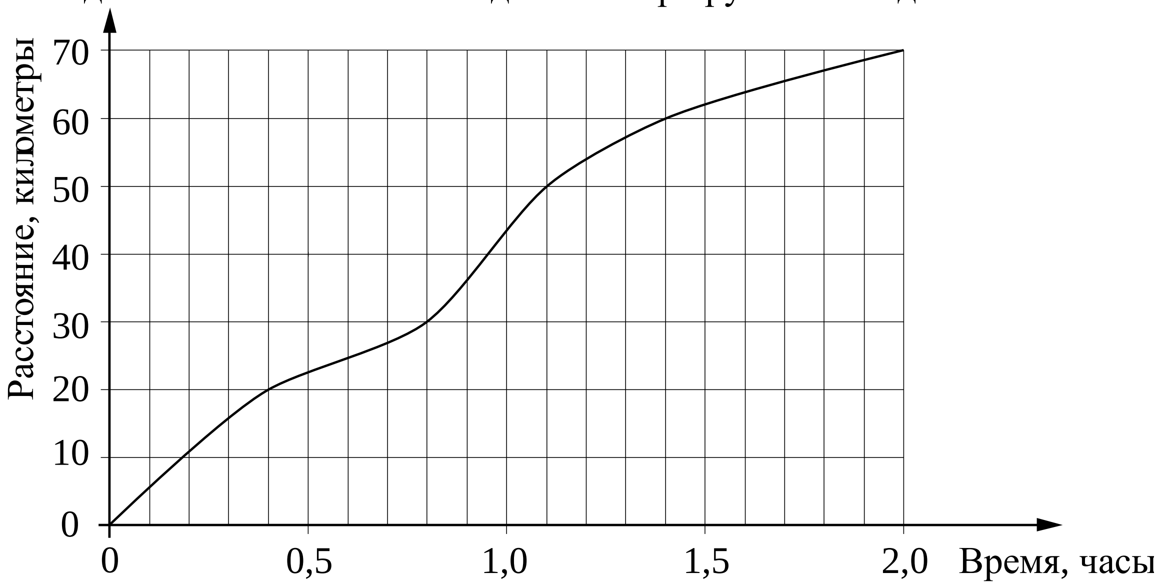
7 В треугольнике ABC $AC = BC = 20$, $AB = 32$. Найдите $\sin A$.



Ответ: ___________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 8.1 или 8.2.

8.1 На рисунке показан график движения автомобиля по маршруту. На оси абсцисс откладывается время, на оси ординат — пройденный путь. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на данном маршруте. Ответ дайте в км/ч.

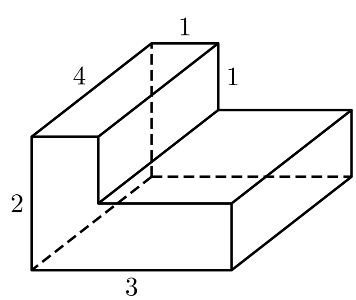


Ответ: ______________________________.

8.2 Прямая $y = 4x + 13$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ______________________________.

9 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ______________________________.

Часть 2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 10.1 или 10.2.

10.1 Найдите значение выражения $\log_{0,48} 25 - \log_{0,48} 12$.

Ответ: ______________________________.

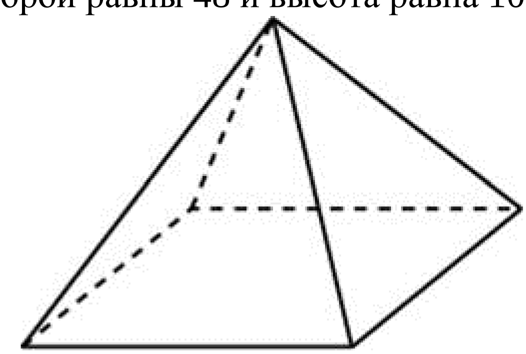
10.2 Найдите значение выражения $\cos 47° \cos 13° - \sin 47° \sin 13°$.

Ответ: ______________________________.

11 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 248 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 12 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: ______________________________.

12 Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 48 и высота равна 10.



Ответ: ______________________________.

13 Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 16 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 4 часа 30 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ______________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 14.1 или 14.2.

14.1 Найдите наименьшее значение функции $y=\log_2\left(x^2-20x+108\right)+4$.

Ответ: ___________________________.

14.2 Найдите точку минимума функции $y=x^3+6x^2+9x+51$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15 *а*) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

16 В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 6. Ребро SA имеет длину 16 и перпендикулярно плоскости основания. Точка P — середина ребра SA.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BCP.

б) Найдите площадь этого сечения.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 17.1 или 17.2.

17.1 Решите неравенство $\log_2\frac{x^2}{4}\cdot\log_{0,5}(0,5x)\le\frac{\log_3\frac{x}{2}}{\log_3 2}$.

17.2 Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1}\le 0$.

18 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 60^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в два раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

19 31 декабря 2010 года Иван взял в банке 900 900 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Иван переводит в банк платёж. Весь долг Иван выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы выплатил долг за 2 равных платежа?

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 - 2x^3 - (2a+3)x^2 + 2ax + 3a + a^2 = 0$ имеет решения. Найдите все корни, которые получаются при единственном значении параметра a.

21 Пусть q – наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

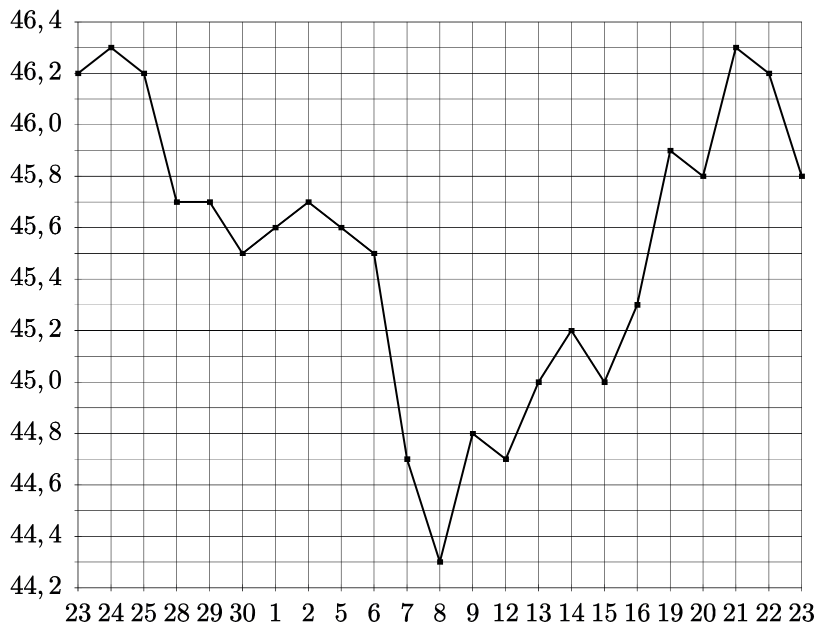
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 На счету Наташиного мобильного телефона было 78 рублей, а после разговора с Костей осталось 33 рубля. Сколько минут длился разговор с Костей, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

Ответ: ____________________________.

2 На рисунке показан курс китайского юаня, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 23 сентября по 23 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена в рублях за 10 китайских юаней. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс китайского юаня в период с 14 по 23 октября. Ответ дайте в рублях за 10 юаней.

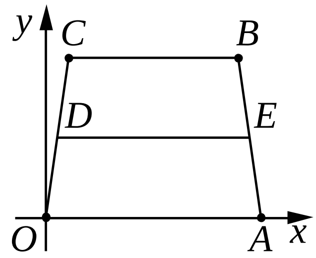


Ответ: ____________________________.

3 Для того чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерстяной пряжи красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 80 рублей за 50 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 70 рублей за 50 граммов и окрасить её. Один пакетик краски стоит 20 рублей и рассчитан на окраску 450 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Ответ: ____________________________.

4 Точки $O(0;\ 0)$, $A(40;\ 0)$, $B(38;\ 8)$, $C(2;\ 8)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину её средней линии DE.



Ответ: ___________________________.

5 В чемпионате по гимнастике участвуют 56 спортсменок: 22 из Аргентины, 20 из Бразилии, остальные — из Парагвая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Парагвая.

Ответ: ___________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 6.1 или 6.2.

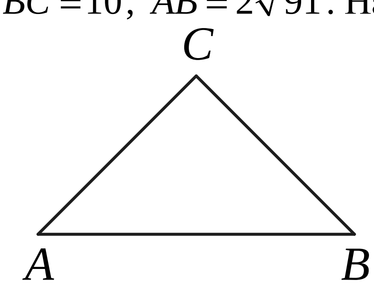
6.1 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4-x}=2$.

Ответ: ___________________________.

6.2 Найдите корень уравнения $\sqrt{13-2x}=5$.

Ответ: ___________________________.

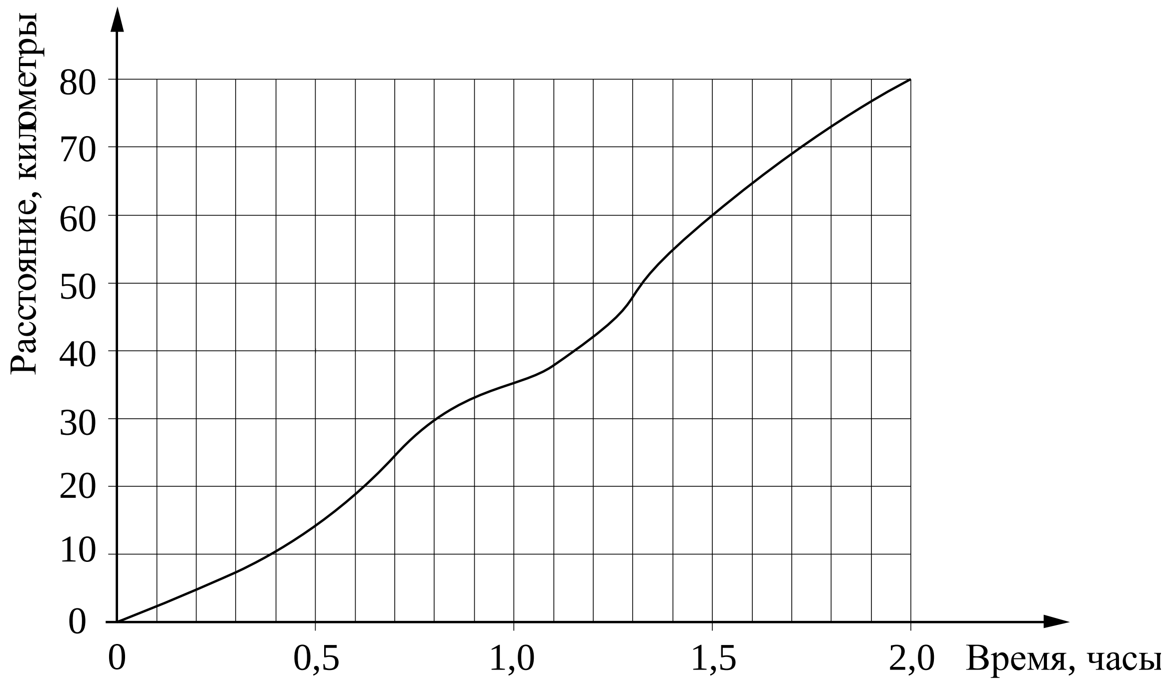
7 В треугольнике ABC $AC=BC=10$, $AB=2\sqrt{91}$. Найдите $\sin A$.



Ответ: ___________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 8.1 или 8.2.

8.1 На рисунке показан график движения автомобиля по маршруту. На оси абсцисс откладывается время, на оси ординат — пройденный путь. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на данном маршруте. Ответ дайте в км/ч.

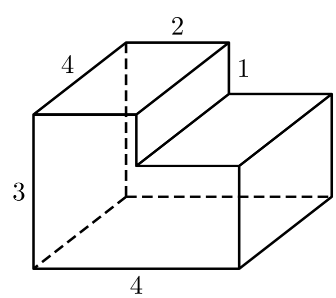


Ответ: ___________________________.

8.2 Прямая $y = 6x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________________.

9 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 10.1 или 10.2.

10.1 Найдите значение выражения $\log_{2,75}16-\log_{2,75}121$.

Ответ: ____________________________.

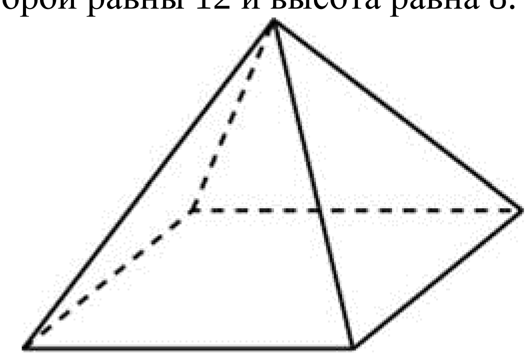
10.2 Найдите значение выражения $\cos 34°\cos 56°-\sin 34°\sin 56°$.

Ответ: ____________________________.

11 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 298 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v=c\cdot\dfrac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c=1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 10 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 12 и высота равна 8.



Ответ: ____________________________.

13 Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 13 км/ч. Через час после него со скоростью 12 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 3 часа 12 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 14.1 или 14.2.

14.1 Найдите наименьшее значение функции $y=\log_2\left(x^2+4x+8\right)-3$.

Ответ: ____________________________.

14.2 Найдите точку минимума функции $y=x^3-20x^2+100x+23$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15 а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

16 В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 12. Ребро SA имеет длину 10 и перпендикулярно плоскости основания. Точка P — середина ребра SA.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BCP.

б) Найдите площадь этого сечения.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 17.1 или 17.2.

17.1 Решите неравенство $\log_3\frac{(x-1)^2}{9}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{3}\le\frac{\log_7\frac{x-1}{3}}{\log_7 3}$.

17.2 Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-x}}{x^2-x-1}\le 0$.

18 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 30°$, $B_1C_1 = 5$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

19 31 декабря 2010 года Дмитрий взял в банке 5 005 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Дмитрий переводит в банк платёж. Весь долг Дмитрий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы выплатил долг за 2 равных платежа?

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2ax + 4a - a^2 = 0$ имеет не менее трёх корней. Найдите все корни, которые получаются при единственном значении параметра a.

21 Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$

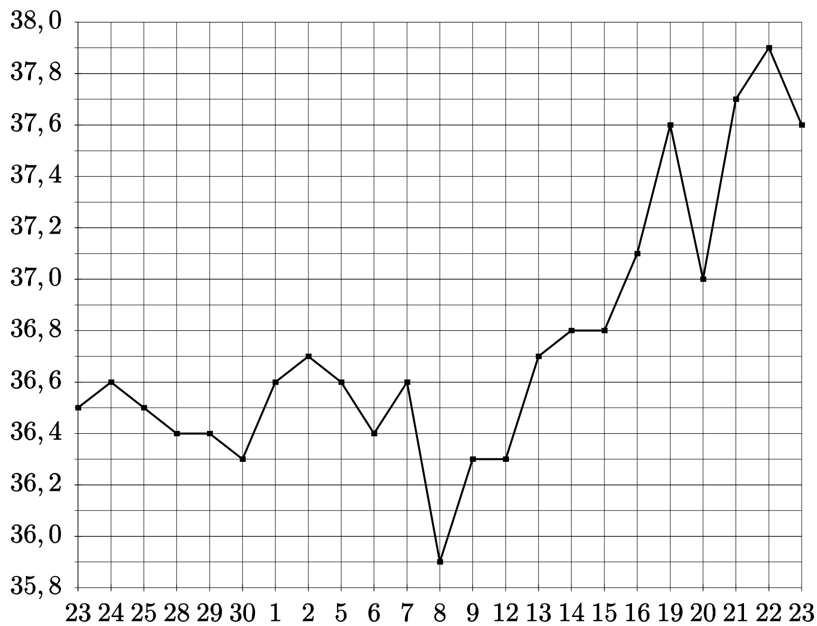
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 На счету Машиного мобильного телефона было 77 рублей, а после разговора с Мишей осталось 42 рубля. Сколько минут длился разговор с Мишей, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

Ответ: ___________________________.

2 На рисунке показан курс японской йены, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 23 сентября по 23 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена в рублях за 100 японских йен. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс японской йены в период с 16 по 22 октября. Ответ дайте в рублях за 100 йен.

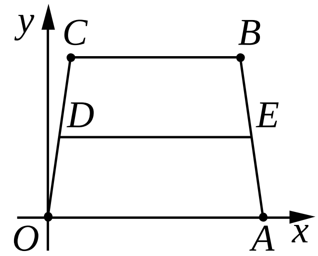


Ответ: ___________________________.

3 Для того чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерстяной пряжи красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 70 рублей за 100 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 рублей за 100 граммов и окрасить её. Один пакетик краски стоит 40 рублей и рассчитан на окраску 450 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Ответ: ___________________________.

4 Точки $O(0;\ 0)$, $A(27;\ 0)$, $B(24;\ 2)$, $C(3;\ 2)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину её средней линии DE.



Ответ: ___________________________.

5 На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 75% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 6.1 или 6.2.

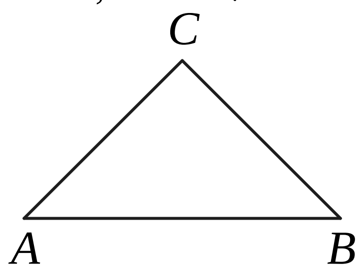
6.1 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x}=25$.

Ответ: ___________________________.

6.2 Найдите корень уравнения $\sqrt{32-7x}=5$.

Ответ: ___________________________.

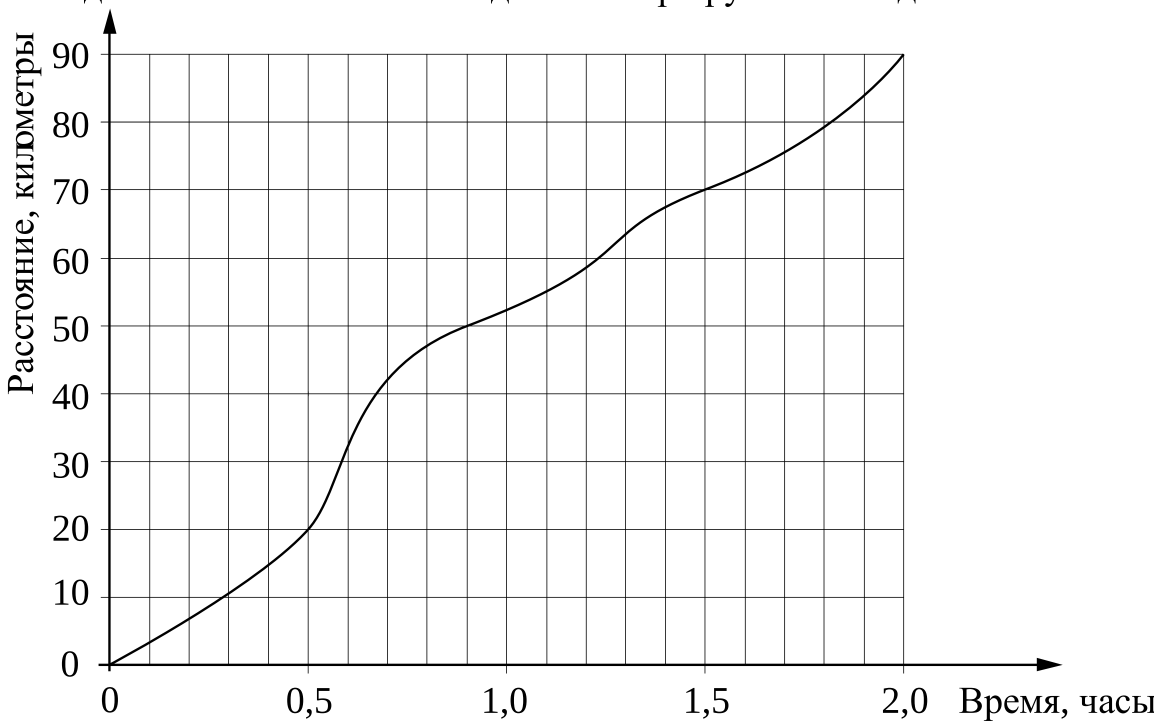
7 В треугольнике ABC $AC=BC=8$, $AB=8\sqrt{3}$. Найдите $\sin A$.



Ответ: ___________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 8.1 или 8.2.

8.1 На рисунке показан график движения автомобиля по маршруту. На оси абсцисс откладывается время, на оси ординат — пройденный путь. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на данном маршруте. Ответ дайте в км/ч.

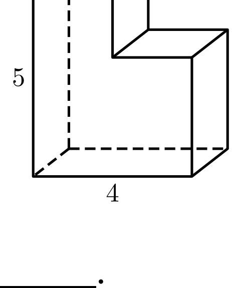


Ответ: ___________________________.

8.2 Прямая $y=-5x-6$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+8x-7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________________.

9 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 10.1 или 10.2.

10.1 Найдите значение выражения $\log_{1,8}5+\log_{1,8}\frac{1}{9}$.

Ответ: ____________________________.

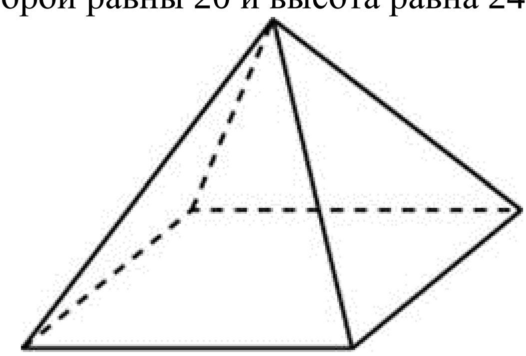
10.2 Найдите значение выражения $\cos105^\circ\cos15^\circ-\sin105^\circ\sin15^\circ$.

Ответ: ____________________________.

11 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 297 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v=c\cdot\frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c=1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 20 и высота равна 24.



Ответ: ____________________________.

13 Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 16 км/ч. Через час после него со скоростью 12 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 3 часа после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 14.1 или 14.2.

14.1 Найдите наименьшее значение функции $y=\log_2\left(x^2+14x+57\right)-2$.

Ответ: ______________________________.

14.2 Найдите точку минимума функции $y=x^3-14x^2+49x+17$.

Ответ: ______________________________.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15 а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

16 В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 6. Ребро SA имеет длину 16 и перпендикулярно плоскости основания. Точка P — середина ребра SA.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BCP.

б) Найдите площадь этого сечения.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 17.1 или 17.2.

17.1 Решите неравенство $\log_2\frac{x^2}{4}\cdot\log_{0,5}(0,5x)\le\frac{\log_3\frac{x}{2}}{\log_3 2}$.

17.2 Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1}\le 0$.

18 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 60°$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в два раза меньше площади четырёхугольника BCC_1B_1.

19 31 декабря 2010 года Иван взял в банке 900 900 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Иван переводит в банк платёж. Весь долг Иван выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы выплатил долг за 2 равных платежа?

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 - 2x^3 - (2a+3)x^2 + 2ax + 3a + a^2 = 0$ имеет решения. Найдите все корни, которые получаются при единственном значении параметра a.

21 Пусть q – наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

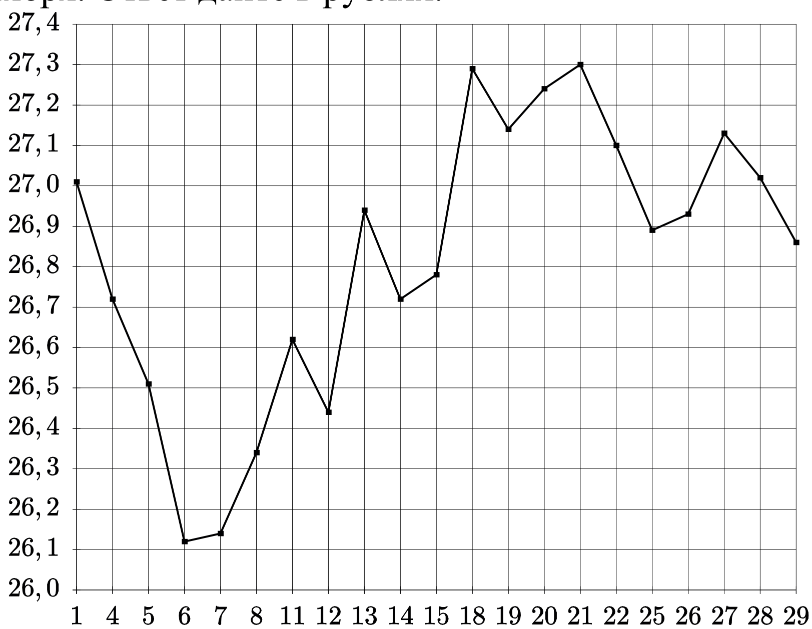
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 На счету Олиного мобильного телефона был 91 рубль, а после разговора с Серёжей осталось 26 рублей. Сколько минут длился разговор с Серёжей, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

Ответ: ____________________________.

2 На рисунке показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 по 29 сентября 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс евро в период с 21 по 28 сентября. Ответ дайте в рублях.

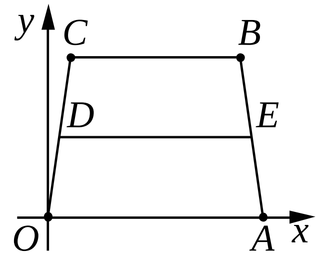


Ответ: ____________________________.

3 Для того чтобы связать свитер, хозяйке нужно 600 граммов шерстяной пряжи красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 60 рублей за 50 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 рублей за 50 граммов и окрасить её. Один пакетик краски стоит 30 рублей и рассчитан на окраску 300 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Ответ: ____________________________.

4 Точки $O(0;\ 0)$, $A(23;\ 0)$, $B(20;\ 18)$, $C(3;\ 18)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину её средней линии DE.



Ответ: ___________________________.

5 На фабрике керамической посуды 15 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 90 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 6.1 или 6.2.

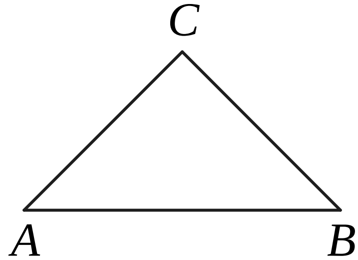
6.1 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3-x}=25$.

Ответ: ___________________________.

6.2 Найдите корень уравнения $\sqrt{7-x}=3$.

Ответ: ___________________________.

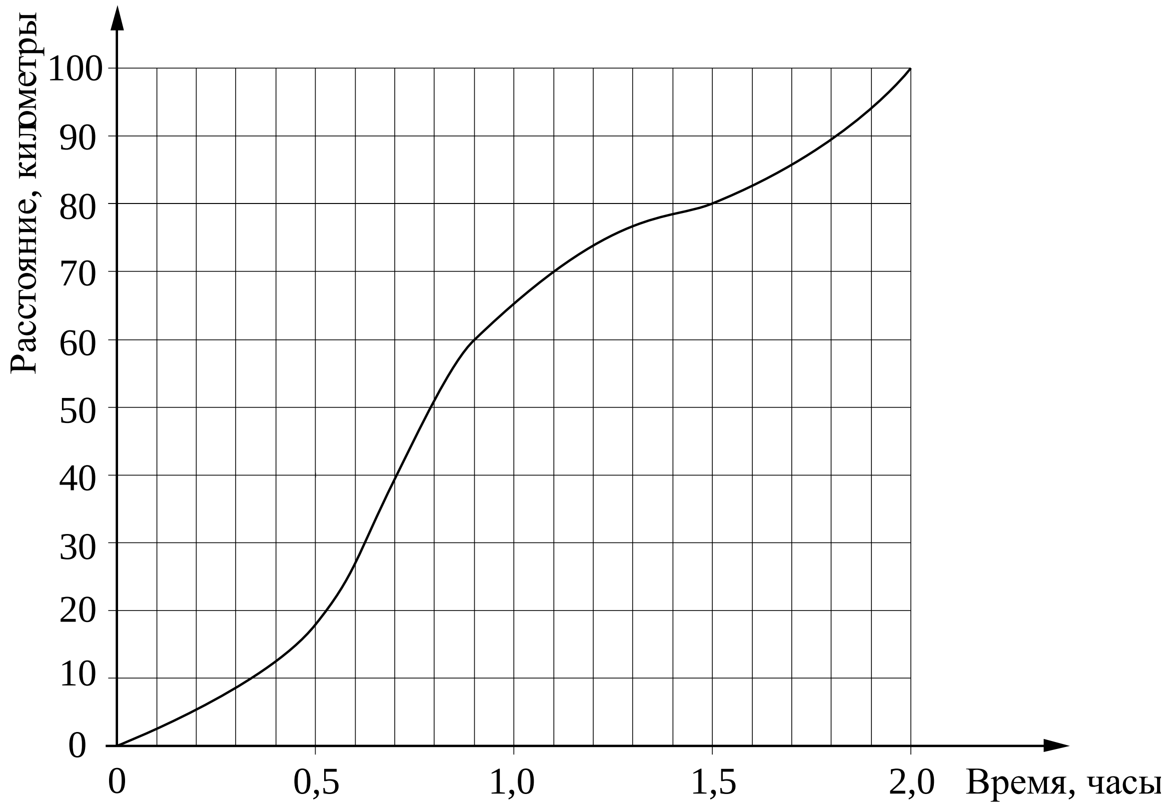
7 В треугольнике ABC $AC=BC=5$, $AB=4\sqrt{6}$. Найдите $\sin A$.



Ответ: ___________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 8.1 или 8.2.

8.1 На рисунке показан график движения автомобиля по маршруту. На оси абсцисс откладывается время, на оси ординат — пройденный путь. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на данном маршруте. Ответ дайте в км/ч.

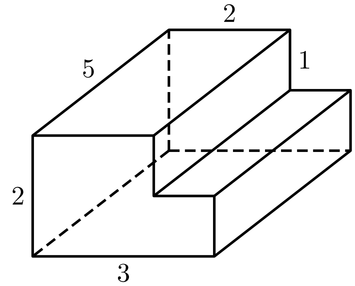


Ответ: ____________________________.

8.2 Прямая $y = -3x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________________.

9 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________________________.

Часть 2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 10.1 или 10.2.

10.1 Найдите значение выражения $\log_{1,25}16+\log_{1,25}\frac{1}{25}$.

Ответ: ______________________________.

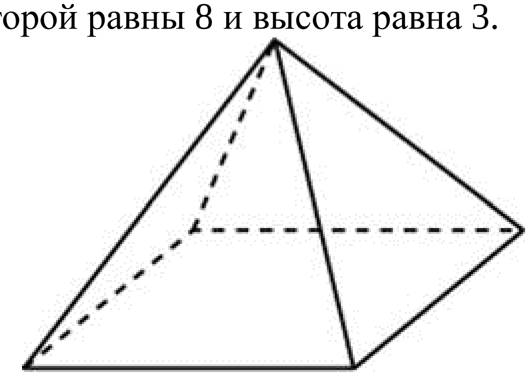
10.2 Найдите значение выражения $\cos 57^\circ \cos 123^\circ - \sin 57^\circ \sin 123^\circ$.

Ответ: ______________________________.

11 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 740 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v=c\cdot\frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c=1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 20 м/с.

Ответ: ______________________________.

12 Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 8 и высота равна 3.



Ответ: ______________________________.

13 Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 13 км/ч. Через час после него со скоростью 11 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа 9 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ______________________________.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 14.1 или 14.2.

14.1 Найдите наименьшее значение функции $y=\log_6\left(x^2+8x+52\right)-10$.

Ответ: ______________________________.

14.2 Найдите точку минимума функции $y=x^3-4x^2+4x+11$.

Ответ: ______________________________.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15 *а*) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

16 В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 12. Ребро SA имеет длину 10 и перпендикулярно плоскости основания. Точка P — середина ребра SA.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BCP.

б) Найдите площадь этого сечения.

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 17.1 или 17.2.

17.1 Решите неравенство $\log_3\frac{(x-1)^2}{9}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{3}\le\frac{\log_7\frac{x-1}{3}}{\log_7 3}$.

17.2 Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-x}}{x^2-x-1}\le 0$.

18 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 30°$, $B_1C_1 = 5$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

19 31 декабря 2010 года Дмитрий взял в банке 5 005 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Дмитрий переводит в банк платёж. Весь долг Дмитрий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы выплатил долг за 2 равных платежа?

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2ax + 4a - a^2 = 0$ имеет не менее трёх корней. Найдите все корни, которые получаются при единственном значении параметра a.

21 Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15

а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos x$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

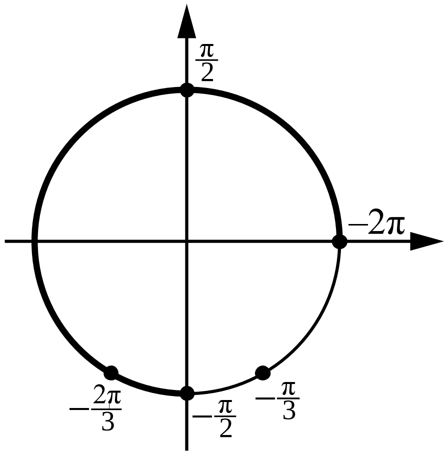
а) Преобразуем уравнение:

$$-2\cos x\cdot\sin x=\sqrt{3}\cos x;\qquad \cos x\cdot\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)=0;$$

$$\cos x=0 \text{ или } \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{, откуда}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k\text{, или } x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k\text{, или } x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.



Получаем $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: *а)* $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; *б*) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$.

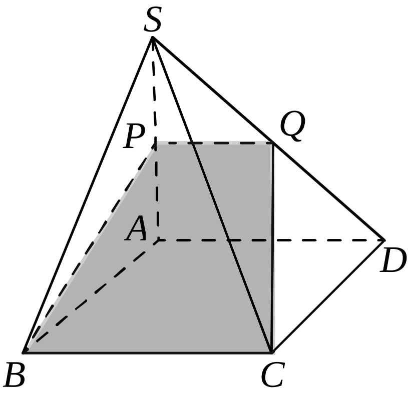
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 6. Ребро SA имеет длину 16 и перпендикулярно плоскости основания. Точка P — середина ребра SA.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BCP.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение. а) Через точку P проведём в плоскости SAD прямую, параллельную BC. Она пересекает ребро SD в точке Q. Трапеция $BPQC$ — искомое сечение.



б) По теореме о трёх перпендикулярах PB перпендикулярно BC. Значит, трапеция $BPQC$ прямоугольная, и BP — её высота. Из прямоугольного треугольника PAB находим: $PB = \sqrt{AB^2 + AP^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Далее $PQ = \frac{1}{2}AD = 6$, поскольку PQ — средняя линия треугольника SAD. Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{BC + PQ}{2} \cdot PB = \frac{6+3}{2} \cdot 10 = 45.$$

Ответ: 45.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, или обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 17.1 или 17.2.

17.1

Решите неравенство $\log_2 \frac{x^2}{4} \cdot \log_{0,5}(0,5x) \le \frac{\log_3 \frac{x}{2}}{\log_3 2}$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$(2\log_2 x - 2)(1 - \log_2 x) \le \log_2 x - 1.$$

Пусть $a = \log_2 x$. Решим неравенство $(2a-2)(1-a) \le a-1$.

Получаем $(1-a)(2a-1) \le 0$, откуда $a \le 0,5$ или $a \ge 1$.

После обратной замены получим $0 < x \le \sqrt{2}$ или $x \ge 2$.

Ответ: $\left(0; \sqrt{2}\right]$, $[2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17.2

Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + x}}{x^2 + x - 1} \le 0$.

Решение.

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x^2 + x \ge 0, \\ x^2 - 2x + 1 \ge 0, \\ \frac{(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + x)}{x^2 + x - 1} \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+1) \ge 0, \\ (x-1)^2 \ge 0, \\ \frac{3x - 1}{x^2 + x - 1} \ge 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $x \le -1$ или $x \ge 0$.

Второе неравенство выполняется при всех x.

Из третьего неравенства получаем $\frac{-\sqrt{5} - 1}{2} < x \le \frac{1}{3}$ или $x > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Решение данного неравенства: $\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < x \le -1,\ 0 \le x \le \frac{1}{3}$ или $x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right]$, $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$.

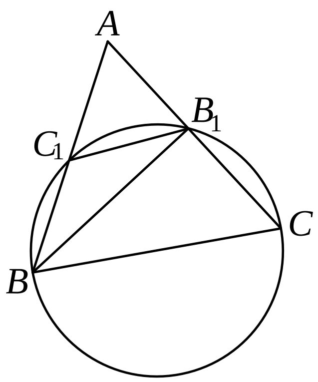
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

18 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 60°$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в два раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение. а) Заметим, что $\angle AB_1C_1 + \angle C_1B_1C = 180°$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC + \angle C_1B_1C = 180°$. Значит, $\angle AB_1C_1 = \angle C_1BC = \angle ABC$. Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.



б) Площадь треугольника AB_1C_1 в два раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в три раза больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{3}$. Отсюда следует, что $BC = \sqrt{3}B_1C_1 = 3$.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = x\sqrt{3}$. Найдём BB_1 по теореме косинусов:

$BB_1^2 = x^2 + 3x^2 - 2x \cdot x\sqrt{3} \cdot \cos 60° = x^2\left(4-\sqrt{3}\right)$. Следовательно, $BB_1 = x\sqrt{4-\sqrt{3}}$.

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin\angle A}; \quad \sin\angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B = \sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны. Получаем

$$\sin\angle BB_1C = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A = \frac{x\sqrt{3}}{x\sqrt{4-\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}.$$

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BCB_1:

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BB_1C} = 2\sqrt{4-\sqrt{3}};\ R = \sqrt{4-\sqrt{3}}.$$

Ответ: б) $\sqrt{4-\sqrt{3}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

19 31 декабря 2010 года Иван взял в банке 900 900 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Иван переводит в банк платёж. Весь долг Иван выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы выплатил долг за 2 равных платежа?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\,\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = \left(Sb - X\right)b - X = Sb^2 - \left(1 + b\right)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - \left(1 + b + b^2\right)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}X.$$

По условию тремя выплатами Иван погасил кредит полностью, поэтому $Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^3\left(b - 1\right)}{\left(b^3 - 1\right)}$.

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Иван гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год должен был бы выплачивать $Y = \frac{Sb^2}{b + 1}$ рублей.

Значит, он отдал банку на $3X - 2Y$ рублей больше.

При $S = 900\,900$ и $a = 20$, получаем $b = 1{,}2$ и

$$X = \frac{900\,900 \cdot 1{,}728 \cdot 0{,}2}{0{,}728} = 427\,680 \text{ (рублей)},$$

$$Y = \frac{900\,900 \cdot 1{,}44}{2{,}2} = 589\,680 \text{ (рублей)}.$$

Значит, $3X - 2Y = 103680$.

Ответ: 103 680.

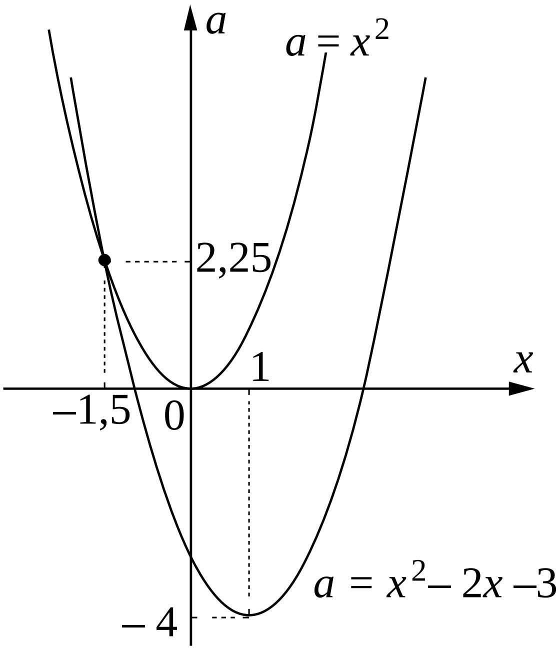
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^4 - 2x^3 - (2a+3)x^2 + 2ax + 3a + a^2 = 0$ имеет решения. Найдите все корни, которые получаются при единственном значении параметра *a*.

Решение.

Преобразуем уравнение: $a^2 - (2x^2 - 2x - 3)a + x^2(x^2 - 2x - 3) = 0$, откуда $a = x^2$ или $a = x^2 - 2x - 3$.

В системе координат xOa уравнение задает совокупность двух парабол, имеющих единственную общую точку $(-1{,}5; 2{,}25)$. Вершины парабол расположены в точках $(0; 0)$ и $(1; -4)$ (см. рис.). Уравнение имеет решение при $a \geq -4$.



Каждый корень получается при двух различных значениях *a*, кроме корня $x = -1{,}5$. Этот корень получается при единственном значении $a = 2{,}25$, так как прямая $x = -1{,}5$ пересекает график в единственной точке $(-1{,}5; 2{,}25)$.

Ответ: $a \geq -4$; $x = -1{,}5$ при $a = 2{,}25$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Найдено множество значений a; корни, соответствующие единственному значению параметра, не определены ИЛИ Найдены корни, но в множество значений a не включены одна или две граничные точки	3
Найдено множество значений a, но не включены одна или две граничные точки. Корни, соответствующие единственному значению параметра не найдены	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

21 Пусть q – наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Решение:

а) Для чисел $x = 17$ и $y = 10$ выполняется условие $3x = 8y - 29$, $q = 170$, $d = 1$, $\frac{q}{d} = 170$.

б) и в) При $x = 1$ и $y = 4$ выполняется равенство $3x = 8y - 29$ и $\frac{q}{d} = 4$. Покажем, что никакое значение $\frac{q}{d} < 4$ не реализуется.

Если $x = y$, то $x = y = \frac{29}{5}$, что невозможно, поскольку числа x и y – натуральные. Пусть для определённости $x < y$ и $x = ad$, а $y = bd$. Тогда натуральные числа a и b взаимно просты и $a < b$. Получаем $q = \frac{xy}{d} = abd$, откуда $\frac{q}{d} = ab$.

Если $\frac{q}{d}=1$, то $a=b$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d}=2$, то $a=1,\ b=2$ и, значит, $y=2x$, откуда $x=\frac{29}{13}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d}=3$, то $a=1,\ b=3$ и, значит, $y=3x$, откуда $x=\frac{29}{21}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15

а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.

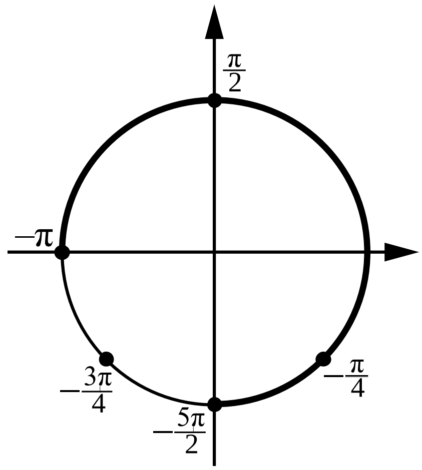
а) Преобразуем уравнение:

$$-2\cos x\cdot\sin x=\sqrt{2}\cos x;\qquad \cos x\cdot(2\sin x+\sqrt{2})=0;$$

$$\cos x=0 \text{ или } \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \text{ или } x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, \text{ или } x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



Получаем $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

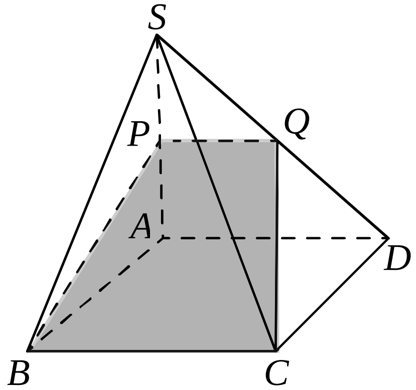
16 В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 12. Ребро SA имеет длину 10 и перпендикулярно плоскости основания. Точка P — середина ребра SA.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BCP.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение.

а) Через точку P проведём в плоскости SAD прямую, параллельную BC. Она пересекает ребро SD в точке Q. Трапеция $BPQC$ — искомое сечение.



б) По теореме о трёх перпендикулярах PB перпендикулярно BC. Значит, трапеция $BPQC$ прямоугольная, и BP — её высота. Из прямоугольного треугольника PAB находим $PB=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$.

Далее $PQ=\frac{1}{2}AD=6$, поскольку PQ — средняя линия треугольника SAD. Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{BC+PQ}{2}\cdot PB=\frac{12+6}{2}\cdot 13=117.$$

Ответ: 117.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, или обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Выполните ТОЛЬКО ОДНО из заданий: 17.1 или 17.2.

17.1

Решите неравенство $\log_3\frac{(x-1)^2}{9}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{3}\le\frac{\log_7\frac{x-1}{3}}{\log_7 3}$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left(2\log_3(x-1)-2\right)\left(1-\log_3(x-1)\right)\le\log_3(x-1)-1.$$

Пусть $a=\log_3(x-1)$. Решим неравенство $(2a-2)(1-a)\le a-1$.

Получаем $(1-a)(2a-1)\le 0$, откуда $a\le 0{,}5$ или $a\ge 1$.

После обратной замены получим $0<x-1\le\sqrt{3}$ или $x-1\ge 3$.

Ответ: $\left(1;1+\sqrt{3}\right]$, $[4;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17.2

Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-x}}{x^2-x-1}\le 0$.

Решение. Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases}x^2-x\ge 0,\\ x^2+4x+4\ge 0,\\ \frac{\left(x^2+4x+4\right)-\left(x^2-x\right)}{x^2-x-1}\le 0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x(x-1)\ge 0,\\ (x+2)^2\ge 0,\\ \frac{5x+4}{x^2-x-1}\le 0.\end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $x\le 0$ или $x\ge 1$.
Второе неравенство выполняется при всех x.

Из третьего неравенства получаем $x\le-\frac{4}{5}$ или $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение данного неравенства: $x\le-\frac{4}{5}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x\le 0$ или $1\le x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right]$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right]$, $\left[1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точек граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

18 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

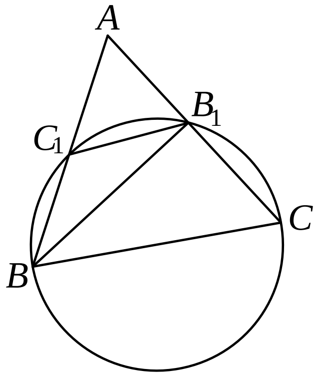
а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Найдите радиус данной окружности, если $\angle A = 30°$, $B_1C_1 = 5$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AB_1C_1 + \angle C_1B_1C = 180°$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC + \angle C_1B_1C = 180°$.

Значит, $\angle AB_1C_1 = \angle C_1BC = \angle ABC$. Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.



б) Площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в четыре раза больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен 2. Отсюда следует, что $BC = 2B_1C_1 = 10$.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = 2x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов:

$$BB_1^2 = x^2 + 4x^2 - 2x \cdot 2x \cdot \cos 30° = x^2\left(5 - 2\sqrt{3}\right).$$

Следовательно, $BB_1 = x\sqrt{\left(5 - 2\sqrt{3}\right)}$.

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin\angle A}; \qquad \sin\angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B = \sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны. Получаем

$$\sin\angle BB_1C = \frac{AB}{BB_1}\sin\angle A = \frac{2x}{x\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}.$$

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BCB_1:

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BB_1C} = 10\sqrt{5 - 2\sqrt{3}};\ R = 5\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}.$$

Ответ: б) $5\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

19 31 декабря 2010 года Дмитрий взял в банке 5 005 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Дмитрий переводит в банк платёж. Весь долг Дмитрий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы выплатил долг за 2 равных платежа?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\,\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = \left(Sb - X\right)b - X = Sb^2 - \left(1 + b\right)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - \left(1 + b + b^2\right)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}X.$$

По условию тремя выплатами Дмитрий погасил кредит полностью, поэтому $Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1}X = 0$, откуда

$$X = \frac{Sb^3\left(b - 1\right)}{\left(b^3 - 1\right)}.$$

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Дмитрий гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год должен был бы выплачивать $Y = \frac{Sb^2}{b + 1}$ рублей.

Значит, он отдал банку на $3X - 2Y$ рублей больше.

При $5\,005\,000$ и $a = 20$, получаем $b = 1{,}2$ и

$$X = \frac{5\,005\,000 \cdot 1{,}728 \cdot 0{,}2}{0{,}728} = 2\,376\,000\ (\text{рублей}),$$

$$Y = \frac{5\,005\,000 \cdot 1{,}44}{2{,}2} = 3\,276\,000\ (\text{рублей}).$$

Значит, $3X - 2Y = 576\,000$.

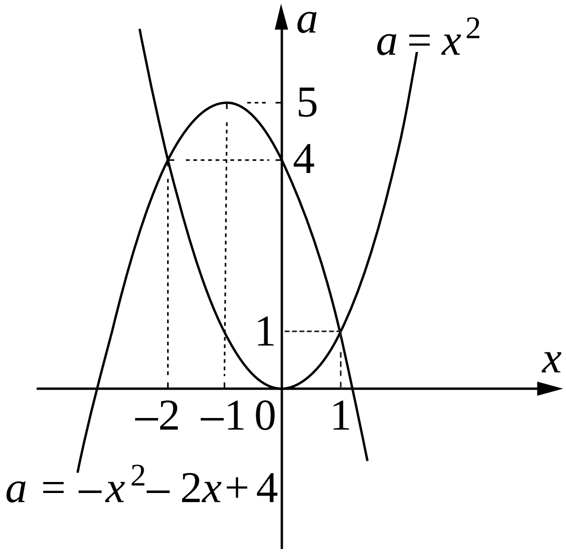
Ответ: 576 000.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^4+2x^3-4x^2-2ax+4a-a^2=0$ имеет не менее трёх корней. Найдите все корни, которые получаются при единственном значении параметра *a*.

Решение. Преобразуем уравнение: $-a^2-(2x-4)a+x^2\left(x^2+2x-4\right)=0$, откуда $a=x^2$ или $a=-x^2-2x+4$.

В системе координат xOa уравнение задает совокупность двух парабол, имеющих общие точки $(-2;4)$ и $(1;1)$. Вершины парабол расположены в точках $(0;0)$ и $(-1;5)$ (см. рис.). Уравнение имеет 3 корня или более при $0\le a\le 5$.



Каждый корень получается при двух различных значениях *a*, кроме корней $x=-2$ и $x=1$. Корень $x=-2$ получается при единственном значении $a=4$, так как прямая $x=-2$ пересекает график в единственной точке $(-2;4)$.

Аналогично, корень $x=1$ получается при единственном значении $a=1$.

Ответ: $0\le a\le 5$. $x=-2$ при $a=4$, $x=1$ при $a=1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Найдено множество значений a; корни, соответствующие единственному значению параметра, не определены ИЛИ Найдены корни, но в множество значений a не включены одна или две граничные точки.	3
Найдено множество значений a, но не включены одна или две граничные точки. Корни, соответствующие единственному значению параметра, не найдены.	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

21 Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$

Решение.
а) Для чисел $x = 17$ и $y = 12$ выполняется условие $7x = 16y - 73$, $q = 204$, $d = 1$, $\frac{q}{d} = 204$.

б) и в) При $x = 1$ и $y = 5$ выполняется равенство $7x = 16y - 73$ и $\frac{q}{d} = 5$. Покажем, что никакое значение $\frac{q}{d} < 5$ не реализуется.

Если $x = y$, то $x = y = \frac{73}{9}$, что невозможно, поскольку числа x и y натуральные. Пусть для определённости $x < y$ и $x = ad$, а $y = bd$. Тогда натуральные числа a и b взаимно просты и $a < b$. Получаем $q = \frac{xy}{d} = abd$, откуда $\frac{q}{d} = ab$.

Если $\frac{q}{d}=1$, то $a=b$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d}=2$, то $a=1,\ b=2$ и, значит, $y=2x$, откуда $x=\frac{73}{25}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d}=3$, то $a=1,\ b=3$ и, значит, $y=3x$, откуда $x=\frac{73}{41}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d}=4$, то $ab=4$. Тогда $a=1$, $b=4$ и, значит, $y=4x$, откуда $x=\frac{73}{57}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4